

УДК 517.968, 517.983.37

DOI 10.21685/2072-3040-2020-4-1

М. Ю. Медведик, Ю. Г. Смирнов, А. А. Цупак

РЕШЕНИЕ ВЕКТОРНОЙ ТРЕХМЕРНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ДИФРАКЦИИ НА ОБЪЕМНОМ НЕОДНОРОДНОМ ТЕЛЕ ДВУХШАГОВЫМ МЕТОДОМ¹

Аннотация.

Актуальность и цели. Цель работы – обоснование и программная реализация двухшагового метода решения векторной трехмерной обратной задачи дифракции на неоднородном рассеивателе, характеризующемся кусочно-гладкой диэлектрической проницаемостью.

Материалы и методы. Исходная краевая задача для системы уравнений Максвелла сводится к системе интегродифференциальных уравнений; для исследования этой системы применяются элементы теории потенциала и преобразования Фурье.

Результаты. Предложена интегральная формулировка векторной обратной задачи дифракции, установлена единственность решения интегродифференциального уравнения первого рода в специальных классах функций; разработан двухшаговый метод решения векторной обратной задачи дифракции; программно реализованы алгоритмы уточнения приближенных решений задачи с зашумленными данными.

Выводы. Двухшаговый метод является эффективным подходом к решению векторных задач ближнепольной томографии.

Ключевые слова: трехмерная векторная обратная задача дифракции, восстановление неизвестной диэлектрической проницаемости, интегродифференциальные уравнения, единственность решения, двухшаговый метод.

М. Yu. Medvedik, Yu. G. Smirnov, A. A. Tsupak

THE SOLUTION OF A VECTOR 3D INVERSE DIFFRACTION PROBLEM ON A 3D HETEROGENEOUS BODY BY A TWO-SWEEP METHOD

Abstract.

Background. The purpose of this work is justification and implementation of the two-step approach for solving vector 3D inverse problem of diffraction by a heterogeneous solid with a piecewise smooth permittivity.

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ 18-01-00219 А.

© Медведик М. Ю., Смирнов Ю. Г., Цупак А. А., 2020. Данная статья доступна по условиям всемирной лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International License (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>), которая дает разрешение на неограниченное использование, копирование на любые носители при условии указания авторства, источника и ссылки на лицензию Creative Commons, а также изменений, если таковые имеют место.

Materials and methods. The original boundary value problem for Maxwell's equations is reduced to a system of integro-differential equations; the system is studied using potential theory and Fourier transform.

Results. The integral formulation of the vector inverse problem of diffraction is given; uniqueness of a solution to the integro-differential equation of the first type is established in special function spaces; non-iterative approach for solving the inverse problem is implemented; several techniques for solutions' refinement are also implemented.

Conclusions. The two-sweep method is an efficient technique for solving vector 3D problems of near-field tomography.

Keywords: vector 3D inverse problem of diffraction, reconstruction of unknown permittivity, integro-differential equations, uniqueness of solutions, two-sweep method.

Введение

Обратные векторные задачи дифракции в трехмерном пространстве представляют большой интерес на протяжении уже нескольких десятилетий. Один из наиболее распространенных подходов к их решению заключается в минимизации некоторых функционалов ошибок и использовании итерационных методов, требующих выбора хорошего начального приближения [1–4].

В данной работе рассматривается неитерационный подход к решению трехмерной векторной обратной задачи дифракции монохроматической электромагнитной волны на неоднородном теле. Задача состоит в отыскании неизвестной диэлектрической проницаемости (или соответствующего ей показателя преломления) ограниченного объемного рассеивателя, расположенного в $\mathbb{R}^3$. В статье представлено описание, обоснование и применение двухшагового метода, который ранее успешно применялся для решения скалярных обратных задач рассеяния [5–12].

Статья состоит из четырех разделов. В первом разделе формулируется прямая задача дифракции монохроматической электромагнитной волны на ограниченном объемном препятствии с заданной постоянной магнитной проницаемостью μ_e и известной диэлектрической проницаемостью $\epsilon(x)$. Исходная краевая задача для уравнений Максвелла сводится к системе, состоящей из сингулярного интегродифференциального уравнения электрического поля по области неоднородности и интегрального представления полного электрического поля вне рассеивателя. Приводятся основные результаты о разрешимости прямой задачи дифракции.

Второй раздел посвящен теоретическому исследованию обратной задачи дифракции, заключающейся в нахождении неизвестной диэлектрической проницаемости $\epsilon(x)$ объемного тела заданной формы. Мы рассматриваем полную интегральную постановку обратной задачи, в отличие от общепринятого подхода, предполагающего решение *скалярного* интегрального уравнения относительно одной («преобладающей» над остальными) компоненты векторного поля. Первый шаг предлагаемого метода заключается в решении линейного интегродифференциального уравнения первого рода относительно тока поляризации $\mathbf{J}(x) = (\epsilon(x) / \epsilon_e - 1)\mathbf{E}(x)$. Здесь $\mathbf{E}(x)$ – напряженность электрического поля, ϵ_e – известная диэлектрическая проницаемость свободного

пространства. На втором шаге $\varepsilon(x)$ явно выражается через известные функции.

В третьем разделе показано, что интегродифференциальное уравнение первого рода имеет не более одного решения в конечномерных пространствах кусочно-постоянных функций [8, 11].

В четвертом разделе описаны результаты численных тестов. Рассмотрено несколько видов неоднородных рассеивателей; приведены результаты расчетов в случаях, когда ближнепольные данные заданы точно и с некоторой (симулированной) погрешностью. Подробное описание использованных методов приведено в [11, 12].

1. Прямая задача дифракции: постановка и основные результаты

Пусть $Q \subset \mathbb{R}^3$ – ограниченная область, причем граница ∂Q – кусочно-гладкая поверхность, состоящая из конечного числа поверхностей класса C^∞ .

Будем предполагать, что область Q является изотропной и неоднородной; она характеризуется постоянной магнитной проницаемостью $\mu_e > 0$ и функцией диэлектрической проницаемости $\varepsilon(x) \in C^\infty(\bar{Q})$.

Введем *относительную диэлектрическую проницаемость* $\varepsilon_r = \varepsilon / \varepsilon_e$ и потребуем, чтобы в каждой точке $x \in \bar{Q}$ существовала функция

$$(\varepsilon_r(x) - 1)^{-1}. \quad (1)$$

Свободное пространство $\mathbb{R}^3 \setminus \bar{Q}$ предполагается однородным с постоянными значениями проницаемостей μ_e , ε_e , причем

$$\mu_e > 0, \quad \operatorname{Re} \varepsilon_e \geq 0, \quad \operatorname{Im} \varepsilon_e \geq 0. \quad (2)$$

Поле возбуждается плоской электромагнитной волной $\mathbf{E}_0, \mathbf{H}_0 \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$, удовлетворяющей системе уравнений Максвелла в $\mathbb{R}^3$,

$$\operatorname{rot} \mathbf{H}_0 = -i\omega \varepsilon_e \mathbf{E}_0, \quad \operatorname{rot} \mathbf{E}_0 = i\omega \mu_e \mathbf{H}_0, \quad (3)$$

полное поле представляется в виде суммы падающего и рассеянного полей:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 + \mathbf{E}_s,$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 + \mathbf{H}_s.$$

Решение прямой задачи дифракции – полное электромагнитное поле $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$, принадлежащее классам функций

$$\mathbf{E}, \mathbf{H} \in C^2(\mathbb{R}^3 \setminus \partial Q) \cap C(\bar{Q}) \cap C(\mathbb{R}^3 \setminus Q), \quad (4)$$

удовлетворяющее в $\mathbb{R}^3 \setminus \partial Q$ уравнениям Максвелла:

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = -i\omega \varepsilon \mathbf{E}, \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = i\omega \mu_e \mathbf{H}, \quad (5)$$

условиям непрерывности касательных компонент на границе области неоднородности:

$$[\mathbf{E}_\tau]|_{\partial Q} = [\mathbf{H}_\tau]|_{\partial Q} = 0, \quad (6)$$

условиям конечности энергии в любом ограниченном объеме пространства:

$$\mathbf{E}, \mathbf{H} \in L_{2,loc}(\mathbb{R}^3), \quad (7)$$

и условиям излучения Сильвера – Мюллера [13] на бесконечности для рассеянного поля:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_s, \mathbf{H}_s &= o(r^{-1}), & \operatorname{Im} k_e > 0, \\ \mathbf{H}_s \times \mathbf{e}_r - \mathbf{E}_s &= o(r^{-1}), & \mathbf{E}_s \times \mathbf{e}_r + \mathbf{H}_s &= o(r^{-1}), \\ \mathbf{E}_s, \mathbf{H}_s &= O(r^{-1}), & \operatorname{Im} k_e = 0, & \quad r \rightarrow \infty, \end{aligned} \quad (8)$$

где $k_e^2 = \omega^2 \epsilon_e \mu_e$ – волновое число, $\mathbf{e}_r = \mathbf{x} / r$, $r = |\mathbf{x}|$, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)^T$; предельные соотношения в (8) выполняются равномерно по всем направлениям.

Определение 1. Решение $\mathbf{E}, \mathbf{H}$ задачи (5)–(8), удовлетворяющее условиям (4), называется *классическим*.

Сформулируем основные результаты о разрешимости поставленной задачи.

Теорема 1. Пусть диэлектрическая проницаемость удовлетворяет в $\bar{Q}$ условиям

$$\epsilon_r \in C^\infty(\bar{Q}), \quad \epsilon_r > 1, \quad (9)$$

а вне $\bar{Q}$ выполняются условия $\epsilon_e > 0$ и $\mu_e > 0$. Тогда задача дифракции (4)–(8) имеет не более одного классического решения.

Краевую задачу (5)–(8) можно свести к системе, состоящей из интегродифференциального уравнения по области неоднородности

$$\mathbf{E}(x) - (k_e^2 + \operatorname{grad} \operatorname{div}) \int_Q G(x, y) (\epsilon_r(y) - 1) \mathbf{E}(y) dy = \mathbf{E}_0(x), \quad x \in Q, \quad (10)$$

и интегрального представления поля вне тела

$$\mathbf{E}(x) = \mathbf{E}_0(x) + (k_e^2 + \operatorname{grad} \operatorname{div}) \int_Q G(x, y) (\epsilon_r(y) - 1) \mathbf{E}(y) dy, \quad x \in \mathbb{R}^3 \setminus \bar{Q}. \quad (11)$$

Магнитное поле всюду выражается через электрическое по формуле

$$\mathbf{H} = \frac{1}{i\omega\mu_e} \operatorname{rot} \mathbf{E}. \quad (12)$$

Имеет место теорема об эквивалентности краевой задачи и интегродифференциального уравнения.

Теорема 2. Если краевая задача (5)–(8) имеет классическое решение $\mathbf{E}, \mathbf{H}$, то вектор-функция $\mathbf{E} \in C(Q) \cap L_2(Q)$ удовлетворяет интегродиффе-

ренциальному уравнению (11). Обратно, если $\mathbf{E} \in \mathbf{L}_2(Q)$ удовлетворяет уравнению (11), то краевая задача (5)–(8) имеет классическое решение $\mathbf{E}, \mathbf{H}$, выраженное формулами (10)–(12).

Теорема 3. Пусть диэлектрическая проницаемость удовлетворяет условиям $\varepsilon \in C^\infty(\bar{Q})$ и $\varepsilon_r(x) > 1, x \in \bar{Q}$. Тогда оператор

$$\mathbb{A}\mathbf{E}(x) = \mathbf{E}(x) - (k_e^2 + \operatorname{grad} \operatorname{div}) \int_Q G(x, y)(\varepsilon_r(y) - 1)\mathbf{E}(y)dy$$

непрерывно обратим в $\mathbf{L}_2(Q)$.

Замечание 1. Доказательства теорем 1–3 приведены в работах [14–21]. Описанные выше результаты обобщаются на случаи многосвязных областей и областей с кусочно-гладкой диэлектрической проницаемостью, в том числе и комплекснозначной с неотрицательной мнимой частью. В последнем случае $\bar{Q}$ определяется как объединение замыканий $\bar{Q}_i$ попарно непересекающихся подобластей Q_i , каждая из которых характеризуется бесконечно дифференцируемой проницаемостью $\varepsilon_i(x) \in C^\infty(\bar{Q}_i)$.

2. Постановка обратной задачи дифракции

В однородном трехмерном пространстве $\mathbb{R}^3$, характеризующемся известным волновым числом $k_e > 0$, мы рассматриваем векторную обратную задачу дифракции монохроматической волны на изотропном неоднородном параллелепипеде Q :

$$Q = \{x : a_1 < x_1 < b_1, a_2 < x_2 < b_2, a_3 < x_3 < b_3\}. \quad (13)$$

Введем на Q равномерную сетку с узлами:

$$x_{k,i_k} = a_k + \frac{b_k - a_k}{n} i_k, \quad 0 \leq i_k \leq n, \quad k = 1, 2, 3.$$

Разобьем Q на элементарные параллелепипеды:

$$Q_{i_1 i_2 i_3} = \{x : x_{k,i_k} < x_k < x_{k,i_k+1}\}, \quad 0 \leq i_k \leq n-1. \quad (14)$$

Введем кусочно-постоянные функции $\chi_{i_1 i_2 i_3}$:

$$\chi_{i_1 i_2 i_3}(x) = \begin{cases} 1, & x \in Q_{i_1 i_2 i_3}, \\ 0, & x \notin Q_{i_1 i_2 i_3}. \end{cases} \quad (15)$$

Далее будем предполагать, что область Q характеризуется известной магнитной проницаемостью $\mu_e > 0$ и подлежащей отысканию кусочно-гладкой функцией диэлектрической проницаемости $\varepsilon(x) = \varepsilon_r(x)\varepsilon_e$. Точнее,

$$\varepsilon(x) = \begin{cases} \varepsilon_{i_1 i_2 i_3}(x), & x \in Q_{i_1 i_2 i_3}, \end{cases} \quad (16)$$

где все функции $\varepsilon_{i_1 i_2 i_3}(x)$ являются бесконечно дифференцируемыми,

$$\varepsilon_{i_1 i_2 i_3} \in C^\infty(Q_{i_1 i_2 i_3}).$$

Диэлектрическую проницаемость в точках граней $\partial Q_{i_1 i_2 i_3}$ можно доопределить как предел значений $\varepsilon(x)$ в одном из смежных параллелепипедов.

Вводя мультииндекс $\mathbf{i} = (i_1 i_2 i_3)$, представим функцию $\varepsilon(x)$ при каждом $x \in Q$ равенством

$$\varepsilon(x) = \sum_{\mathbf{i}} \varepsilon_{\mathbf{i}}(x) \chi_{\mathbf{i}}(x). \quad (17)$$

Рассмотрим некоторую ограниченную область D такую, что $\overline{D} \cap \overline{Q} = \emptyset$. Предположим, что в точках $x \in D$ известны значения полного поля на фиксированной частоте $\omega > 0$.

При постановке обратной задачи дифракции будем использовать систему интегральных равенств (10), (11), определяющих зависимость поля $\mathbf{E}(x)$ от диэлектрической проницаемости $\varepsilon(x)$ и падающей волны $\mathbf{E}_0(x)$.

Постановка обратной задачи дифракции. Требуется восстановить функцию $\varepsilon(x)$ в области неоднородности Q по результатам измерения полного поля $\mathbf{E}(x)$ в точках области D , используя равенство

$$(k_e^2 + \text{grad div}) \int_Q G(x, y) (\varepsilon_r(y) - 1) \mathbf{E}(y) dy = \mathbf{E}(x) - \mathbf{E}_0(x), \quad x \in D, \quad (18)$$

с учетом уравнения в области неоднородности Q :

$$\mathbf{E}(x) - (k_e^2 + \text{grad div}) \int_Q G(x, y) (\varepsilon_r(y) - 1) \mathbf{E}(y) dy = \mathbf{E}_0(x), \quad x \in Q. \quad (19)$$

Опишем двухшаговый метод решения обратной задачи дифракции. Введем в области Q вектор-функцию

$$\mathbf{J}(x) := (\varepsilon_r(x) - 1) \mathbf{E}(x),$$

предполагая, что всюду в Q выполнено условие $|\varepsilon_r(x)| \geq \tilde{\varepsilon} > 1$. Тогда из представления поля вне рассеивателя получим уравнение для $\mathbf{J}(x)$:

$$(k_e^2 + \text{grad div}) \int_Q G(x, y) \mathbf{J}(y) dy = \mathbf{E}(x) - \mathbf{E}_0(x), \quad x \in D, \quad (20)$$

а уравнение в области неоднородности перепишем в виде

$$\frac{\mathbf{J}(x)}{\varepsilon_r(x) - 1} - (k_e^2 + \text{grad div}) \int_Q G(x, y) \mathbf{J}(y) dy = \mathbf{E}_0(x), \quad x \in Q. \quad (21)$$

Двухшаговый метод восстановления диэлектрической проницаемости в Q состоит в следующем:

1. По известным значениям падающего поля $\mathbf{E}_0(x)$ и полного поля $\mathbf{E}(x)$ в области D необходимо найти ток $\mathbf{J}(x)$ в Q из уравнения (20).
2. Вычислить явно $\varepsilon_r(x)$ в Q , используя уравнение (21).

3. Единственность решения интегродифференциального уравнения первого рода в специальных классах функций

Для приближенного отыскания $\mathbf{J}$ будет применен метод коллокации с финитными базисными функциями. Поэтому далее будем предполагать, что $\mathbf{J}$ представляет собой кусочно-постоянную функцию

$$\mathbf{J}(x) = \sum_i \mathbf{J}_i \chi_i(x), \quad (22)$$

где $\mathbf{J}_i \in \mathbb{C}^3$ – неизвестные (векторные) коэффициенты; $\chi_i(x)$ – характеристические функции множеств Q_i (на гранях Q_i ток можно доопределить любым из постоянных значений).

Имеет место теорема о единственности решения уравнения (20) в классе кусочно-постоянных функций $\mathbf{J}(x)$.

Теорема 4. Пусть задано разбиение тела Q на n^3 параллелепипедов Q_i . Уравнение

$$\left(k_e^2 + \text{grad div}\right) \int_Q G(x, y) \mathbf{J}(y) dy = \mathbf{E}_s(x), \quad x \in D, \quad \overline{D} \cap \overline{Q} = \emptyset, \quad \mathbf{E}_s \in C^\infty(\overline{D}), \quad (23)$$

имеет не более одного кусочно-постоянного решения $\mathbf{J}(x)$ при всех $k_e > 0$ за исключением, быть может, конечного числа значений k_e .

Доказательство. 1. Рассмотрим однородное уравнение

$$(k_e^2 + \text{grad div}) \int_Q G(x, y) \mathbf{J}(y) dy = 0, \quad x \in D.$$

Введем обозначение:

$$\mathbf{v}(x) = (k_e^2 + \text{grad div}) \int_Q G(x, y) \mathbf{J}(y) dy, \quad x \in \mathbb{R}^3. \quad (24)$$

Вне области неоднородности $\overline{Q}$ ядро $G(x, y)$ бесконечно дифференцируемо, поэтому допустимо повторное дифференцирование под знаком интеграла и, следовательно, имеет место покомпонентное равенство

$$(\Delta + k_e^2) \mathbf{v}(x) = 0.$$

Так как в подобласти $D \subset \mathbb{R}^3 \setminus \overline{Q}$ функция $\mathbf{v}$ тривиальна, то $\mathbf{v} \equiv 0$ и всюду в $\mathbb{R}^3 \setminus \overline{Q}$ согласно принципу единственного продолжения [13].

Из условий сопряжения для электрического поля на $\partial Q'$ следует, что

$$\mathbf{v}_\tau|_{\partial Q} = 0.$$

2. Рассмотрим фундаментальное решение $\bar{G}(x, y) = \frac{e^{-ik_e|x-y|}}{4\pi|x-y|}$ урав-

нения Гельмгольца и с учетом однородных граничных условий запишем еще одно представление для $\mathbf{v}(x)$:

$$\mathbf{v}(x) = (k_e^2 + \text{grad div}) \int_Q \bar{G}(x, y) \mathbf{J}(y) dy, \quad x \in Q.$$

Вычитая последнее из (24), получим

$$\begin{aligned} \mathbf{w}(x) &= (k_e^2 + \text{grad div}) \int_Q \frac{\sin(k_e |x - y|)}{4\pi |x - y|} \mathbf{J}(y) dy = \\ &= (k_e^2 + \text{grad div}) \int_Q G_0(|x - y|) \mathbf{J}(y) dy \equiv 0, \quad x \in Q. \end{aligned} \quad (25)$$

Вектор-функция $\mathbf{w} \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$ равна нулю в Q и всюду удовлетворяет однородному уравнению Гельмгольца. Следовательно, $\mathbf{w} \equiv 0$ в $\mathbb{R}^3$.

3. Для преобразования Фурье $F\mathbf{w}(\xi)$ верно тождество $F\mathbf{w} \equiv 0$ в $\mathbb{R}^3$.

Введем параметры

$$h_1 = (b_1 - a_1) / n_1, \quad h_2 = (b_2 - a_2) / n_2, \quad h_3 = (b_3 - a_3) / n_3$$

и параллелепипед

$$Q_0 = (a_1, a_1 + h_1) \times (a_2, a_2 + h_2) \times (a_3, a_3 + h_3),$$

а все конечные элементы на Q определим через сдвиги Q_0 на некоторый вектор

$$Q_{\mathbf{i}} = Q_{i_1 i_2 i_3} = Q_0 + r_{i_1 i_2 i_3}, \quad (26)$$

где

$$r_{i_1 i_2 i_3} = \mathbf{r}_{\mathbf{i}} = (i_1 h_1, i_2 h_2, i_3 h_3), \quad 0 \leq i_k < n. \quad (27)$$

Тогда для $\mathbf{w}(x)$ имеет место представление

$$\begin{aligned} \mathbf{w}(x) &= \sum_{\mathbf{i}} \mathbf{J}_{\mathbf{i}} (k_e^2 + \text{grad div}) \int_{Q_0 + \mathbf{r}_{\mathbf{i}}} G_0(|x - y|) dx = \\ &= \sum_{\mathbf{i}} \mathbf{J}_{\mathbf{i}} (k_e^2 + \text{grad div}) \int_{Q_0} G_0(|x - y - \mathbf{r}_{\mathbf{i}}|) dx. \end{aligned} \quad (28)$$

Вычислим преобразование Фурье для $\mathbf{w}$ с учетом последнего:

$$\begin{aligned} F\mathbf{w} &= -\hat{\mathbf{d}}(\xi) \sum_{\mathbf{i}} \mathbf{J}_{\mathbf{i}} F(G_0(|x - \mathbf{r}_{\mathbf{i}}|) * \chi_0(x)) = -\hat{\mathbf{d}}(\xi) \sum_{\mathbf{i}} \mathbf{J}_{\mathbf{i}} F(G_0(|x - \mathbf{r}_{\mathbf{i}}|)) F(\chi_0(x)) = \\ &= -\hat{\mathbf{d}}(\xi) \cdot F\chi_0(\xi) \cdot FG_0(\xi) \sum_{\mathbf{i}} \mathbf{J}_{\mathbf{i}} e^{i\mathbf{r}_{\mathbf{i}} \cdot \xi} = \\ &= -\hat{\mathbf{d}}(\xi) (2\pi)^{-3} \prod_{k=1}^3 \frac{e^{-ih_k \xi_k} - 1}{\xi_k} \cdot \delta(|\xi| - k_e) \cdot \sum_{\mathbf{i}} \mathbf{J}_{\mathbf{i}} e^{i\mathbf{r}_{\mathbf{i}} \cdot \xi}. \end{aligned}$$

Матрица $\hat{\mathbf{d}}(\xi)$ определяется следующим образом:

$$\hat{\mathbf{d}}(\xi) = \begin{pmatrix} \xi_1^2 - k_e^2 & \xi_1 \xi_2 & \xi_1 \xi_3 \\ \xi_1 \xi_2 & \xi_2^2 - k_e^2 & \xi_2 \xi_3 \\ \xi_1 \xi_3 & \xi_2 \xi_3 & \xi_3^2 - k_e^2 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, тождество $F\mathbf{w} \equiv 0$ сводится к равенству

$$\hat{\mathbf{d}}(\xi) \sum_{\mathbf{i}} \mathbf{J}_{\mathbf{i}} e^{i\mathbf{r}_{\mathbf{i}} \cdot \xi} \equiv 0 \quad (29)$$

на сфере S_{k_e} радиуса k_e .

Так как $\det \hat{\mathbf{d}}(\xi) = (|\xi|^2 - k_e^2)k_e^4$, то $\hat{\mathbf{d}}(\xi)$ при $|\xi| = k_e$ является вырожденной матрицей.

Перепишем $\hat{\mathbf{d}}(\xi)$, переставив местами первую и третью строки, а затем выполним ряд строчечных преобразований и учтем, что $\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 = k_e^2$:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{d}}(\xi) &= \begin{pmatrix} \xi_1 \xi_3 & \xi_2 \xi_3 & \xi_3^2 - k_e^2 \\ \xi_1 \xi_2 & \xi_2^2 - k_e^2 & \xi_2 \xi_3 \\ \xi_1^2 - k_e^2 & \xi_1 \xi_2 & \xi_1 \xi_3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \xi_1 \xi_3 & \xi_2 \xi_3 & -\xi_1^2 - \xi_2^2 \\ \xi_1 \xi_2 & -\xi_1^2 - \xi_3^2 & \xi_2 \xi_3 \\ -\xi_2^2 - \xi_3^2 & \xi_1 \xi_2 & \xi_1 \xi_3 \end{pmatrix} \sim \\ &\sim \begin{pmatrix} \xi_1 \xi_3 & \xi_2 \xi_3 & -\xi_1^2 - \xi_2^2 \\ 0 & -k_e^2 & k_e^2 \frac{\xi_2}{\xi_3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \xi_1 \xi_3 & \xi_2 \xi_3 & -\xi_1^2 - \xi_2^2 \\ 0 & 1 & -\frac{\xi_2}{\xi_3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\xi_1 / \xi_3 \\ 0 & 1 & -\xi_2 / \xi_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Следовательно, система уравнений (29) сводится к равенствам

$$\begin{aligned} \xi_2 \sum_{\mathbf{i}} J_{\mathbf{i}}^{(1)} e^{i\mathbf{r}_{\mathbf{i}} \cdot \xi} - \xi_1 \sum_{\mathbf{i}} J_{\mathbf{i}}^{(2)} e^{i\mathbf{r}_{\mathbf{i}} \cdot \xi} &= 0, \quad \xi \in S_{k_e}^2, \\ \xi_3 \sum_{\mathbf{i}} J_{\mathbf{i}}^{(2)} e^{i\mathbf{r}_{\mathbf{i}} \cdot \xi} - \xi_2 \sum_{\mathbf{i}} J_{\mathbf{i}}^{(3)} e^{i\mathbf{r}_{\mathbf{i}} \cdot \xi} &= 0, \quad \xi \in S_{k_e}^2. \end{aligned} \quad (30)$$

Докажем тривиальность решения систем вида (30), установив линейную независимость функций

$$\left\{ \xi_2 e^{i\mathbf{r}_{\mathbf{i}} \cdot \xi}, \xi_1 e^{i\mathbf{r}_{\mathbf{j}} \cdot \xi} \right\} \quad (31)$$

на сфере радиуса k_e .

Для этого достаточно показать, что невырожденной является матрица Грама Γ системы функций (31). Представим Γ в блочном виде:

$$\Gamma = \begin{pmatrix} \Gamma^{1,1} & \Gamma^{1,2} \\ \Gamma^{2,1} & \Gamma^{2,2} \end{pmatrix}.$$

Элементы блоков вычисляются следующим образом:

$$\Gamma_{\mathbf{ij}}^{m,n} = \int_{S_{k_e}} \xi_n \xi_m e^{ir_{\mathbf{i}} \cdot \xi} e^{-ir_{\mathbf{j}} \cdot \xi} d\xi.$$

Сделав замену $\xi = k_e \eta$, перейдем к интегралам по единичной сфере $S = S_1$:

$$\Gamma_{\mathbf{ij}}^{m,n} = k_e^2 \int_S \eta_n \eta_m e^{ik_e r_{\mathbf{i}} \cdot \eta} d\eta = k_e^2 \gamma_{\mathbf{ij}}^{m,n},$$

где $r_{\mathbf{ij}} = r_{\mathbf{i}} - r_{\mathbf{j}}$.

Вычислим сначала диагональные элементы блоков $\gamma^{m,n}$:

$$\gamma_{\mathbf{ii}}^{1,2} = \int_{|\eta|=1} \eta_1 \eta_2 d\eta = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\theta \sin \varphi \cos \varphi \sin^3 \theta = 0,$$

$$\gamma_{\mathbf{ii}}^{1,1} = \int_{|\eta|=1} \eta_1^2 d\eta = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\theta \sin^2 \varphi \sin^3 \theta = \frac{4\pi}{3},$$

$$\gamma_{\mathbf{ii}}^{2,2} = \int_{|\eta|=1} \eta_2^2 d\eta = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\theta \cos^2 \varphi \sin^3 \theta = \frac{4\pi}{3}.$$

Следовательно, элементы главной диагонали матрицы γ равны $\frac{4\pi}{3}$.

Вычислим теперь внедиагональные элементы блока $\gamma^{1,1}$:

$$\gamma_{\mathbf{ij}}^{1,1} = \int_S \eta_1^2 e^{ik_e r_{\mathbf{ij}} \cdot \eta} d\eta = \int_{S_+} + \int_{S_-} = {}^+ \gamma_{\mathbf{ij}}^{1,1} + {}^- \gamma_{\mathbf{ij}}^{1,1}.$$

Выразим $\eta_3 = \pm \sqrt{1 - \eta_1^2 - \eta_2^2}$ и учтем, что $\eta'^2 = \eta_1^2 + \eta_2^2 < 1$. Тогда

$$\begin{aligned} {}^\pm \gamma_{\mathbf{ij}}^{1,1} &= \int_{S_\pm: |\eta| < 1} \eta_1^2 e^{ik_e(r_{\mathbf{ij}}^{(1)} \eta_1 + r_{\mathbf{ij}}^{(2)} \eta_2 \pm r_{\mathbf{ij}}^{(3)} \sqrt{1 - \eta_1^2 - \eta_2^2})} \frac{d\eta}{\sqrt{1 - \eta_1^2 - \eta_2^2}} = \\ &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \rho d\rho \left(\rho^2 \cos^2 \varphi e^{ik_e \rho (r_{\mathbf{ij}}^{(1)} \cos \varphi + r_{\mathbf{ij}}^{(2)} \sin \varphi)} \cdot e^{\pm ik_e r_{\mathbf{ij}}^{(3)} \sqrt{1 - \rho^2}} \right). \end{aligned}$$

Воспользуемся соотношением

$$r_{ij}^{(1)} \cos \varphi + r_{ij}^{(2)} \sin \varphi = \sqrt{(r_{ij}^{(1)})^2 + (r_{ij}^{(2)})^2} \cos(\varphi - \varphi_0)$$

и введем обозначения

$$A := k_e \sqrt{(r_{ij}^{(1)})^2 + (r_{ij}^{(2)})^2}, \quad B := \pm k_e r_{ij}^{(3)}.$$

Теперь имеем

$$\pm \gamma_{ij}^{1,1} = \int_0^1 \rho^3 e^{iB\sqrt{1-\rho^2}} d\rho \int_0^{2\pi} d\varphi \left(\cos^2 \varphi e^{iA\rho \cos \varphi} \right). \quad (32)$$

Пусть $A = 0$, т.е. $r_{ij}^{(1)} = r_{ij}^{(2)} = 0$ и $r_{ij}^{(3)} \neq 0$. Имеем

$$\begin{aligned} \pm \gamma_{ij}^{1,1} &= \pi \int_0^1 \rho^3 e^{iB\sqrt{1-\rho^2}} d\rho = \pi \int_0^1 (t - t^3) e^{iBt} t dt = \\ &= \pi \left(e^{iB} \left(-\frac{2}{B^2} + \frac{6i}{B^3} - \frac{6}{B^4} \right) - \frac{1}{B^2} - \frac{6}{B^4} \right) = O\left(\frac{1}{B^2}\right), B \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Пусть теперь $A \neq 0$. Для внутреннего интеграла в (32) можем записать

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \cos^2(\varphi + \varphi_0) e^{iA\rho \cos \varphi}.$$

Учтем, что

$$\begin{aligned} \cos^2(\varphi + \varphi_0) &= \cos^2 \varphi \cos^2 \varphi_0 - 2 \cos \varphi \sin \varphi \cos \varphi_0 \sin \varphi_0 + \sin^2 \varphi \sin^2 \varphi_0 = \\ &= \frac{1}{2} (1 + \cos 2\varphi) \cos^2 \varphi_0 - \frac{1}{2} \sin 2\varphi \sin 2\varphi_0 + \frac{1}{2} (1 - \cos 2\varphi) \sin^2 \varphi_0. \end{aligned}$$

Получим

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} d\varphi \sin \varphi e^{iA\rho \cos \varphi} \cos \varphi &= - \int_0^{2\pi} d(\cos \varphi) e^{iA\rho \cos \varphi} \cos \varphi = 0; \\ \int_0^{2\pi} d\varphi e^{iA\rho \cos \varphi} &= 2 \int_0^{\pi} d\varphi e^{iA\rho \cos \varphi} = 2\pi J_0(A\rho); \\ \int_0^{2\pi} d\varphi e^{iA\rho \cos \varphi} \cos 2\varphi &= 2 \int_0^{\pi} d\varphi e^{iA\rho \cos \varphi} \cos 2\varphi = -2\pi J_2(A\rho). \end{aligned}$$

В последнем выражении мы воспользовались известным соотношением из [22].

Вернемся к вычислению интегралов $\pm \gamma_{ij}^{1,1}$, которые теперь можно представить в виде

$$\pm \gamma_{ij}^{1,1} = c_0 \int_0^1 \rho^3 e^{iB\sqrt{1-\rho^2}} J_0(A\rho) d\rho + c_2 \int_0^1 \rho^3 e^{iB\sqrt{1-\rho^2}} J_2(A\rho) d\rho, \quad (33)$$

где коэффициенты c_0, c_2 определяются по ранее выписанным выражениям.

Покажем, что каждый из интегралов в сумме (33) может быть сделан сколь угодно малым при достаточно больших k_e . Рассуждения проведем для первого интеграла, который представим в виде

$$\int_0^1 \rho^3 e^{iB\sqrt{1-\rho^2}} J_0(A\rho) d\rho = \int_0^\delta + \int_\delta^1 = i_1 + i_2.$$

Так как подынтегральная функция непрерывна на отрезке $[0;1]$, то для любого $\varepsilon > 0$ можно такое указать $\delta > 0$, что $|i_1| < \varepsilon$. Зафиксируем такое значение δ . Теперь за счет выбора достаточно большого значения $k_e > 0$ с учетом асимптотики функции Бесселя [23]:

$$J_\nu(x) = O\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right), \quad x \rightarrow +\infty,$$

можно получить, что и $|i_1| < \varepsilon$ равномерно по всем $r_{ij}^{(1)}, r_{ij}^{(2)}$.

Таким образом, показано, что внедиагональные элементы блока $\Gamma^{1,1}$ могут быть сделаны сколь угодно малыми за счет выбора k_e ; для остальных блоков $\Gamma^{n,m}$ рассуждения проводятся аналогично.

Итак, матрица Грама может быть представлена в виде

$$\Gamma = k_e^2 \left(\frac{4\pi}{3} I + \Gamma_1 \right),$$

где I – единичная матрица, а для Γ_1 верна оценка нормы $\|\Gamma_1\| < 1$.

Следовательно, Γ – невырожденная матрица, функции

$$\left\{ \xi_n e^{ir_i \cdot \xi}, \xi_m e^{ir_j \cdot \xi} \right\}$$

линейно независимы при $n \neq m$ на сфере радиуса k_e , а уравнение (20) имеет лишь тривиальное решение при достаточно большом $k_e > K$.

Заметим теперь, что определитель матрицы Грама аналитически зависит от волнового числа k_e и, следовательно, может иметь на промежутке $[0;K]$ лишь конечное число нулей. Таким образом, единственная разрешимость уравнения (20) установлена для всех k_e за исключением, быть может, конечного числа значений k_e . Теорема доказана.

Из теоремы 4 следует, что и решение обратной задачи дифракции для случая кусочно-постоянных токов $\mathbf{J}$ единственно в силу однозначности представления $\varepsilon(x)$ согласно уравнению (21).

Замечание 2 (о существовании решения). Предположим, что правая часть уравнения (20) принадлежит линейной оболочке функций

$$(k_e^2 + \text{grad div}) \int_Q G(x, y) \mathbf{J}(y) dy$$

на данной фиксированной сетке в Q . Тогда оператор уравнения (20) можно рассматривать как отображение, действующее в конечномерных пространствах. Это отображение будет обратимым вследствие теоремы 4.

4. Численное решение обратной задачи дифракции

В данном разделе мы опишем условия и результаты вычислительных экспериментов.

В качестве области неоднородности, в которой восстанавливается диэлектрическая проницаемость, рассмотрим куб Q с длиной ребра 0,3 м. Такой размер области вполне соответствует исследуемым на практике объектам. Значение волнового числа свободного от рассеивателя пространства равно 2 м^{-1} . В области Q введем прямоугольную сетку согласно соотношениям (13), (14).

Для проверки эффективности предложенного двухшагового метода была рассмотрена следующая модельная задача.

На первом этапе была решена *прямая задача дифракции* с заданной диэлектрической проницаемостью $\varepsilon(x)$ и определено полное поле $\mathbf{E}$ в области неоднородности Q . На втором этапе решалась обратная задача дифракции двухшаговым методом. При этом для симуляции исходных данных в области D использовалось представление

$$\mathbf{E}(x) = (k_e^2 + \text{grad div}) \int_Q G(x, y) (\varepsilon_r(y) - 1) \mathbf{E}(y) dy + \mathbf{E}_0(x), \quad x \in D,$$

выражающее полное электрическое поле через решение $\mathbf{E}$ прямой задачи в Q . Полученные на втором этапе приближенные значения $\varepsilon(x)$ сравнивались с известными точными значениями.

Вещественная часть известной диэлектрической проницаемости $\text{Re} \varepsilon(x)$ в первом эксперименте представлена на рис. 1.

Для численного решения уравнения (20) применяется метод коллокации. Ток $\mathbf{J}$ ищется в виде линейной комбинации кусочно-постоянных

базисных функций (определены выше), $\mathbf{J}(x) = \sum_{j=1}^N \mathbf{c}_j \chi_j(x)$, а в качестве точек

коллокации используются точки $r_i \in D$, $i = 1, \dots, N$. В качестве падающей волны рассматривается поле точечного источника, расположенного в точке x_0 , $x_0 \notin \bar{Q} \cup \bar{D}$.

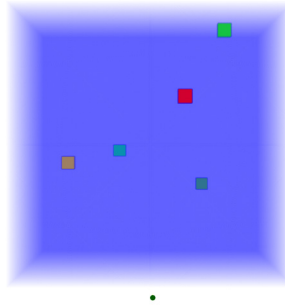


Рис. 1. Вещественная часть точного решения модельной задачи

На рис. 2 представлено приближенное решение обратной задачи, найденное двухшаговым методом. Метод позволяет не только определить геометрическое расположение неоднородностей, но и восстановить с приемлемой точностью значения искомой диэлектрической проницаемости даже при условии зашумленности ближнепольных данных.

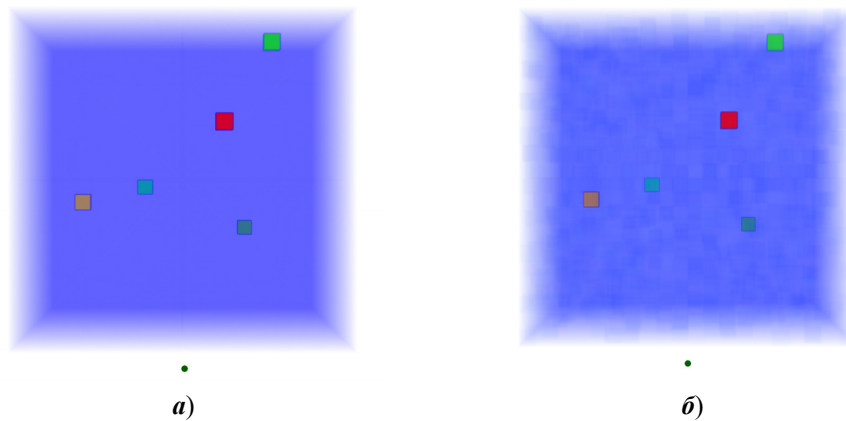


Рис. 2. Вещественная часть восстановленной диэлектрической проницаемости тела: **a** – значения поля в обратной задаче заданы точно; **б** – в ближнепольные данные внесена погрешность (шум) 5 %. Кругик под областью неоднородности обозначает место расположения источника падающей волны

Во втором вычислительном эксперименте в качестве области неоднородности был рассмотрен куб с длиной ребра 0,1 м ($Q = [-0,05; 0,05]^3$), внутри которого расположен однородный шар с центром в начале координат диаметра 0,06 м.

На рис. 3, **a** представлена мнимая часть точного решения ($\text{Im}\epsilon(x)$) обратной задачи дифракции, а на рис. 3, **б, в** – мнимые части найденных двухшаговым методом приближенных решений с точными и зашумленными ближнепольными данными соответственно. Отметим, что приближение для $\epsilon(x)$ находится не во всем шаре, а на объединении прямоугольных носителей базисных функций, целиком лежащих в шаре. Поэтому и точное решение представлено для кусочно-параллелепипедальной области.

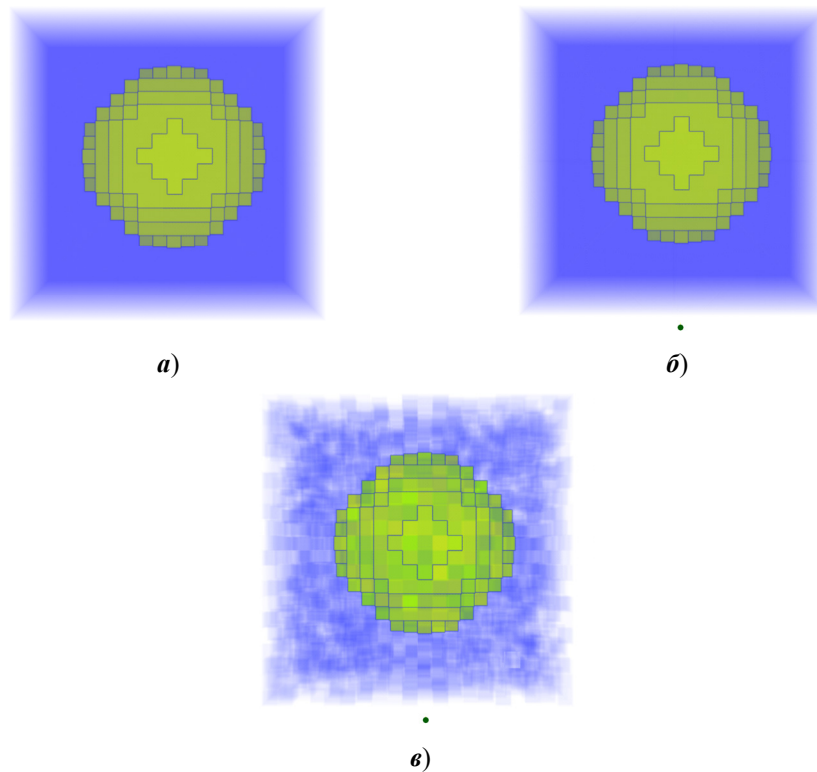


Рис. 3. Мнимая часть точного решения обратной задачи дифракции на кубе с шаровым включением (а); восстановленное значение $\text{Im}\epsilon(x)$, значения поля вне рассеивателя заданы точно (б); восстановленное значение $\text{Im}\epsilon(x)$ (в), значения поля вне рассеивателя заданы с погрешностью 5 %

Заключение

Разработан и теоретически обоснован двухшаговый метод решения задачи восстановления диэлектрической проницаемости неоднородного тела по измерениям ближнего поля, основанный на решении векторного линейного интегродифференциального уравнения по области неоднородности. Основным теоретическим результатом работы является теорема о единственности решения сингулярного интегродифференциального уравнения первого рода в классе кусочно-постоянных функций. Проведенные вычислительные эксперименты подтверждают эффективность предложенного алгоритма для решения обратной задачи дифракции.

Библиографический список

1. **Beilina, L.** Approximate Global Convergence and Adaptivity for Coefficient Inverse Problems / L. Beilina, M. Klibanov. – New York : Springer, 2012. – 407 p.
2. **Isakov, H.** Inverse Problems for Partial Differential Equations / H. Isakov. – New York : Springer, 2005. – 358 p.
3. **Romanov, V. G.** Inverse Problems of Mathematical Physics / V. G. Romanov. – Utrecht, The Netherlands : VNU, 1986. – 239 p.
4. **Bakushinsky, A. B.** Iterative Methods for Approximate Solution of Inverse Problems / A. B. Bakushinsky, M. Yu. Kokurin. – New York : Springer, 2004. – 291 p.

5. **Евстигнеев, Р. О.** Обратная задача восстановления неоднородностей тела для ранней диагностики заболеваний с помощью микроволновой томографии / Р. О. Евстигнеев, М. Ю. Медведик, Ю. Г. Смирнов, А. А. Цупак // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2017. – № 4. – С. 3–17.
6. **Евстигнеев, Р. О.** Двухшаговый метод решения скалярной обратной трехмерной задачи дифракции на объемном неоднородном теле / Р. О. Евстигнеев, М. Ю. Медведик, Ю. Г. Смирнов, А. А. Цупак // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2019. – № 4. – С. 12–28.
7. **Медведик, М. Ю.** Обратная задача определения параметров неоднородности тел, расположенных в свободном пространстве / М. Ю. Медведик, Р. О. Евстигнеев, Е. А. Гундарев // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2018. – № 4. – С. 50–61.
8. **Смирнов, Ю. Г.** О единственности решения обратной задачи дифракции на неоднородном теле с кусочно-гельдеровым показателем преломления в специальном классе функций / Ю. Г. Смирнов, А. А. Цупак // Доклады Академии наук. – 2019. – Т. 485, № 5. – С. 545–547.
9. **Смирнов, Ю. Г.** Двухмерная скалярная обратная задача дифракции на неоднородном препятствии с кусочно-непрерывным показателем преломления / Ю. Г. Смирнов, А. А. Цупак // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2018. – № 3. – С. 3–16.
10. **Medvedik, M. Y.** Two-step method for solving inverse problem of diffraction by an inhomogeneous body / M. Y. Medvedik, Y. G. Smirnov, A. A. Tsupak // Springer Proceedings in Mathematics and Statistics 38th. «Nonlinear and Inverse Problems in Electromagnetics – PIERS 2017». – 2018. – P. 83–92.
11. **Medvedik, M. Yu.** The two-step method for determining a piecewise-continuous refractive index of a 2D scatterer by near field measurements / M. Yu. Medvedik, Yu. G. Smirnov, A. A. Tsupak // Inverse Problems in Science and Engineering. – 2020. – Vol. 28, № 3. – P. 427–447.
12. **Medvedik, M. Yu.** Non-iterative two-step method for solving scalar inverse 3D diffraction problem / M. Yu. Medvedik and Yu. G. Smirnov and A. A. Tsupak // Inverse Problems in Science and Engineering. – 2020. – DOI 10.1080/17415977.2020.1727466.
13. **Colton, D.** Inverse Acoustic and Electromagnetic Scattering Theory / D. Colton, R. Kress. – Berlin, Heidelberg : Springer-Verlag, 2013. – 418 p.
14. **Валовик, Д. В.** Существование и единственность решения задачи дифракции электромагнитной волны на системе непересекающихся тел и экранов / Д. В. Валовик, М. Ю. Медведик, Ю. Г. Смирнов, А. А. Цупак // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2015. – № 1. – С. 89–97.
15. **Смирнов, Ю. Г.** Математическая теория дифракции акустических и электромагнитных волн на системе экранов и неоднородных тел / Ю. Г. Смирнов, А. А. Цупак. – Москва : РУСАЙНС, 2016. – 226 с.
16. **Смирнов, Ю. Г.** О фредгольмовости уравнения электрического поля в векторной задаче дифракции на объемном частично экранированном теле / Ю. Г. Смирнов, А. А. Цупак // Дифференциальные уравнения. – 2016. – Т. 52, № 9. – С. 1242–1251.
17. **Смирнов, Ю. Г.** О существовании и единственности классического решения задачи дифракции электромагнитной волны на неоднородном диэлектрическом теле без потерь / Ю. Г. Смирнов, А. А. Цупак // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2017. – Т. 57, № 4. – С. 702–709.

18. **Цупак, А. А.** О фредгольмовости интегродифференциального оператора в задаче дифракции электромагнитной волны на объемном теле, частично экранированном системой плоских экранов / А. А. Цупак // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2015. – № 4. – С. 3–11.
19. **Smirnov, Yu. G.** On the Volume Singular Integrodifferential Equation for the Electromagnetic Diffraction Problem / Yu. G. Smirnov, A. A. Tsupak, D. V. Valovik // *Applicable Analysis: An International Journal*. – 2017. – Vol. 96, № 2. – P. 173–189.
20. **Smirnov, Yu. G.** Existence and Uniqueness Theorems in Electromagnetic Diffraction on Systems of Lossless Dielectrics and Perfectly Conducting Screens / Yu. G. Smirnov, A. A. Tsupak // *Applicable Analysis: An International Journal*. – 2017. – Vol. 96, № 8. – P. 1326–1341.
21. **Smirnov, Yu. G.** Integrodifferential Equations of the Vector Problem of Electromagnetic Wave Diffraction by a System of Nonintersecting Screens and Inhomogeneous Bodies / Yu. G. Smirnov, A. A. Tsupak // *Advances in Mathematical Physics*. – 2015. – Vol. 2015. – 6 p. – Article ID 945965.
22. **Градштейн, И. С.** Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений / И. С. Градштейн, И. М. Рыжик. – Москва : Физматгизт, 1963. – 1100 с.
23. **Владимиров, В. С.** Уравнения математической физики / В. С. Владимиров. – Москва : Наука, 1981. – 512 с.

References

1. Beilina L., Klibanov M. *Approximate Global Convergence and Adaptivity for Coefficient Inverse Problems*. New York: Springer, 2012, 407 p.
2. Isakov H. *Inverse Problems for Partial Differential Equations*. New York: Springer, 2005, 358 p.
3. Romanov V. G. *Inverse Problems of Mathematical Physics*. Utrecht, The Netherlands: VNU, 1986, 239 p.
4. Bakushinsky A. B., Kokurin M. Yu. *Iterative Methods for Approximate Solution of Inverse Problems*. New York: Springer, 2004, 291 p.
5. Evstigneev R. O., Medvedik M. Yu., Smirnov Yu. G., Tsupak A. A. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Povolzhskiy region. Fiziko-matematicheskie nauki* [University proceedings. Volga region. Physical and mathematical sciences]. 2017, no. 4, pp. 3–17. [In Russian]
6. Evstigneev R. O., Medvedik M. Yu., Smirnov Yu. G., Tsupak A. A. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Povolzhskiy region. Fiziko-matematicheskie nauki* [University proceedings. Volga region. Physical and mathematical sciences]. 2019, no. 4, pp. 12–28. [In Russian]
7. Medvedik M. Yu., Evstigneev R. O., Gundarev E. A. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Povolzhskiy region. Fiziko-matematicheskie nauki* [University proceedings. Volga region. Physical and mathematical sciences]. 2018, no. 4, pp. 50–61. [In Russian]
8. Smirnov Yu. G., Tsupak A. A. *Doklady Akademii nauk* [Reports of the Academy of Sciences]. 2019, vol. 485, no. 5, pp. 545–547. [In Russian]
9. Smirnov Yu. G., Tsupak A. A. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Povolzhskiy region. Fiziko-matematicheskie nauki* [University proceedings. Volga region. Physical and mathematical sciences]. 2018, no. 3, pp. 3–16. [In Russian]
10. Medvedik M. Y., Smirnov Y. G., Tsupak A. A. *Springer Proceedings in Mathematics and Statistics 38th. «Nonlinear and Inverse Problems in Electromagnetics – PIERS 2017»*. 2018, pp. 83–92.
11. Medvedik M. Yu., Smirnov Yu. G., Tsupak A. A. *Inverse Problems in Science and Engineering*. 2020, vol. 28, no. 3, pp. 427–447.

12. Medvedik M. Yu., Smirnov Yu. G., Tsupak A. A. *Inverse Problems in Science and Engineering*. 2020. DOI 10.1080/17415977.2020.1727466.
13. Colton D., Kress R. *Inverse Acoustic and Electromagnetic Scattering Theory*. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2013, 418 p.
14. Valovik D. V., Medvedik M. Yu., Smirnov Yu. G., Tsupak A. A. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Povolzhskiy region. Fiziko-matematicheskie nauki* [University proceedings. Volga region. Physical and mathematical sciences] 2015, no. 1, pp. 89–97. [In Russian]
15. Smirnov Yu. G., Tsupak A. A. *Matematicheskaya teoriya difraktsii akusticheskikh i elektro-magnitnykh voln na sisteme ekranov i neodnorodnykh tel* [Mathematical theory of diffraction of acoustic and electromagnetic waves on a system of screens and heterogeneous bodies]. Moscow: RUSAYNS, 2016, 226 p. [In Russian]
16. Smirnov Yu. G., Tsupak A. A. *Differentsial'nye uravneniya* [Differential equations]. 2016, vol. 52, no. 9, pp. 1242–1251. [In Russian]
17. Smirnov Yu. G., Tsupak A. A. *Zhurnal vychislitel'noy matematiki i matematicheskoy fiziki* [Journal of computational mathematics and mathematical physics]. 2017, vol. 57, no. 4, pp. 702–709. [In Russian]
18. Tsupak A. A. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Povolzhskiy region. Fiziko-matematicheskie nauki* [University proceedings. Volga region. Physical and mathematical sciences]. 2015, no. 4, pp. 3–11. [In Russian]
19. Smirnov Yu. G., Tsupak A. A., Valovik D. V. *Applicable Analysis: An International Journal*. 2017, vol. 96, no. 2, pp. 173–189.
20. Smirnov Yu. G., Tsupak A. A. *Applicable Analysis: An International Journal*. 2017, vol. 96, no. 8, pp. 1326–1341.
21. Smirnov Yu. G., Tsupak A. A. *Advances in Mathematical Physics*. 2015, vol. 2015, 6 p. Article ID 945965.
22. Gradshteyn I. S., Ryzhik I. M. *Tablitsy integralov, summ, ryadov i proizvedeniy* [Tables of integrals, sums, series and products]. Moscow: Fizmatgizt, 1963, 1100 p. [In Russian]
23. Vladimirov V. S. *Uravneniya matematicheskoy fiziki* [Equations of mathematical physics]. Moscow: Nauka, 1981, 512 p. [In Russian]

Медведик Михаил Юрьевич

кандидат физико-математических наук,
доцент, кафедра математики
и суперкомпьютерного моделирования,
Пензенский государственный университет
(Россия, г. Пенза, ул. Красная, 40)

E-mail: mmm@pnzgu.ru

Medvedik Mikhail Yur'evich

Candidate of physical and mathematical
sciences, associate professor, sub-
department of mathematics and supercom-
puter modeling, Penza State University
(40 Krasnaya street, Penza, Russia)

Смирнов Юрий Геннадьевич

доктор физико-математических наук,
профессор, заведующий кафедрой
математики и суперкомпьютерного
моделирования, Пензенский
государственный университет (Россия,
г. Пенза, ул. Красная, 40)

E-mail: mmm@pnzgu.ru

Smirnov Yuriy Gennad'evich

Doctor of physical and mathematical
sciences, professor, head
of the sub-department of mathematics
and supercomputer modeling,
Penza State University
(40 Krasnaya street, Penza, Russia)

Цупак Алексей Александрович

кандидат физико-математических наук,
доцент, кафедра математики
и суперкомпьютерного моделирования,
Пензенский государственный
университет (Россия,
г. Пенза, ул. Красная, 40)

E-mail: altsupak@yandex.ru

Tsupak Aleksey Aleksandrovich

Candidate of physical and mathematical
sciences, associate professor, sub-
department of mathematics and supercom-
puter modeling, Penza State University
(40 Krasnaya street, Penza, Russia)

Образец цитирования:

Медведик, М. Ю. Решение векторной трехмерной обратной задачи дифракции на объемном неоднородном теле двухшаговым методом / М. Ю. Медведик, Ю. Г. Смирнов, А. А. Цупак // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2020. – № 4 (56). – С. 3–21. – DOI 10.21685/2072-3040-2020-4-1.